

УДК 534.1

А.И. Рубаненко

Харьковский национальный университет городского хозяйства им.А.Н.Бекетова, Украина

ОСОБЕННОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С ГАСИТЕЛЕМ

Рассмотрена задача о свободных поперечных колебаниях стержня с упруго присоединенной массой в качестве гасителя. Определены собственные формы колебаний системы при шарнирном закреплении краев стержня. Исследованы особенности форм колебаний для различных параметров жесткостей стержня и гасителя, а также координат точки крепления гасителя к несущему стержню.

Ключевые слова: динамический гаситель колебаний, свободные поперечные колебания стержня, собственная форма.

Постановка проблемы

Проблемы динамики занимают значительное место в современных исследованиях объектов техники и строительства. Можно отметить задачи о движении транспортных средств и подъемных механизмов, вибрационных испытаниях технических объектов, колебаниях сооружений и их элементов и др. [1-5]. Важной проблемой является уменьшение уровня колебаний, оказывающего существенное влияние на прочность, надежность и долговечность объектов приборо- и машиностроения, строительных конструкций и их элементов. Типовыми расчетными схемами многих элементов конструкций являются стержневые модели с распределенными параметрами. Одним из средств уменьшения вибраций является применение динамических гасителей колебаний, активно применяемых в строительных сооружениях [6, 7]. Для эффективной работы гасителя необходимо знать характеристики внешнего возмущения и параметры собственных колебаний защищаемой системы.

Анализ последних исследований и публикаций

Динамические гасители колебаний в системах с распределенными параметрами рассмотрены в работах [6-14]. Теоретически и экспериментально определены собственные частоты и формы колебаний заданных систем, амплитудные и амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний, приведена оценка эффективности гашения. В работе [15] исследованы закономерности распределения собственных частот при различных параметрах системы. Однако в известных работах не рассмотрены особенности собственных форм с учетом

механических и конструктивных параметров несущего стержня и присоединенного гасителя.

Формулировка цели статьи

Целью статьи является исследование форм свободных поперечных колебаний стержня с упруго присоединенной массой в качестве гасителя при варьировании его механических и конструктивных характеристик.

Изложение основного материала

Расчётная схема механической системы, состоящей из шарнирно опертого по краям стержня и упруго присоединенной массы, приведена на рис. 1 [15]. Здесь: m_0 , c_0 – соответственно масса и жесткость гасителя; l – длина стержня; x_1 – координата точки крепления гасителя к стержню.

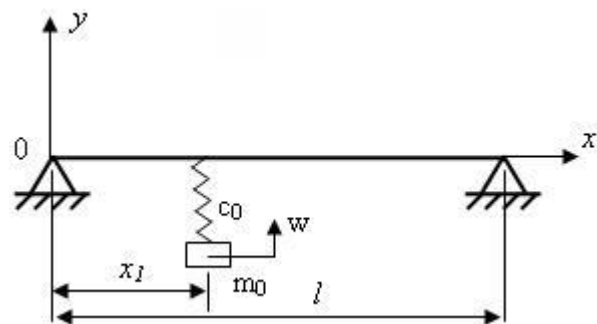


Рис. 1. Расчётная схема стержня с гасителем колебаний

Система дифференциальных уравнений свободных поперечных колебаний стержня с гасителем и граничные условия имеют вид [6, 7, 15, 16]:

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} [c_0(w - y_1)] \cdot \delta(x - x_1) \\ m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_0(w - y_1) = 0 \end{cases}, (1)$$

где $a^2 = \frac{EI}{\rho F}$; E, ρ - модуль упругости и плотность

материала стержня; I, F - момент инерции и площадь поперечного сечения стержня соответственно; $y=y(x,t)$ - перемещение (прогиб) произвольного сечения стержня; $y_1=y(x_1,t)$, $w=w(t)$ - перемещения сечения стержня с координатой $x=x_1$ и присоединенной массы m_0 соответственно; $\delta(x-x_1)$ - дельта-функция.

Граничные условия рассматриваемой схемы определяются соотношениями:

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0; & y|_{x=l} = 0; \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0} = 0; & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=l} = 0. \end{cases} (2)$$

С использованием метода Фурье получены соотношения для собственных форм колебаний стержня с гасителем, которые имеют вид

$$Y(x) = \begin{cases} Y_0(x), 0 \leq x \leq x_1 \\ Y_0(x) + \frac{1}{k^3} [\gamma_G Y_0(x_1)] \cdot V[k(x - x_1)], x_1 \leq x \leq l \end{cases}, (3)$$

где $Y_0(x) = AS(kx) + BT(kx) + CU(kx) + DV(kx)$; A, B, C, D - постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий; $S(kx), T(kx), U(kx), V(kx)$ - функции

Крылова [16]; $\gamma_G = \frac{1}{EI} \frac{c_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$; $k^4 = \frac{\omega^2}{a^2}$; ω -

частота колебаний системы; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m_0}}$ -

парциальная частота гасителя.

Проведены численные расчеты для механической системы с параметрами [15]: $E=2 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho=8 \cdot 10^3$ кг/м³; $l=8$ м; $b=6$ см, $h=8$ см, где b и h -

ширина и высота прямоугольного поперечного сечения стержня; $D_m = \frac{M}{m_0} = 10$, где D_m -

безразмерный параметр, определяющий отношение масс стержня M и гасителя m_0 .

Для анализа особенностей собственных форм использованы следующие обозначения:

$\omega_1^0=17,83$ рад/с, $\omega_2^0=71,23$ рад/с, $\omega_3^0=160,26$ рад/с -

собственные частоты стержня без гасителя,

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ - собственные частоты стержня с

гасителем; n и n' - число узлов соответствующих форм колебаний (при совпадающих значениях n и n'

формы имеют разные конфигурации); $D_c = \frac{c_0 l^3}{EI}$ -

безразмерный параметр, который выражает

отношение жесткостей гасителя и стержня; $\xi = \frac{x_1}{l}$ -

безразмерный параметр, определяющий точку крепления гасителя.

На рис. 2 представлены графики первых четырех собственных форм колебаний стержня с гасителем, которые соответствуют параметрам системы $\xi=3/7$,

$D_c=150$ и частотам $\omega_1=16,24$ рад/с, $\omega_2=66,67$ рад/с,

$\omega_3=80,27$ рад/с, $\omega_4=162,61$ рад/с. Как видно из

графиков, двум частотам системы ω_2, ω_3 , которые

близки ко второй собственной частоте стержня без гасителя $\omega_2^0=71,23$ рад/с, соответствуют формы

колебаний $Y_2(x), Y_3(x)$ с таким же числом узлов

($n=1$), как и у соответствующей формы колебаний

стержня без гасителя. При этом конфигурации обеих

форм системы подобны второй (кососимметричной)

форме колебаний стержня без гасителя, однако имеют

явную асимметрию значений максимальных и

минимальных ординат для каждой из форм. Другие

формы системы, в частности $Y_1(x), Y_4(x)$,

практически не отличаются от соответствующих форм

колебаний стержня без гасителя, приведенных в

работе [17].

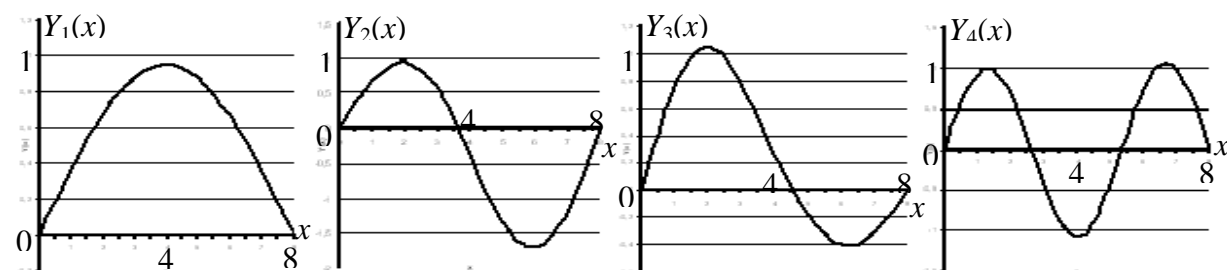


Рис. 2. Собственные формы колебаний стержня с гасителем при $\xi=3/7$ и $D_c=150$

Для параметров системы $\zeta=3/7$, $D_c=800$ и частот $\omega_1=16,31$ рад/с, $\omega_2=69,94$ рад/с, $\omega_3=141,05$ рад/с, $\omega_4=195,16$ рад/с такую же асимметрию имеют двухузловые ($n=2$) формы колебаний стержня с гасителем $Y_3(x)$, $Y_4(x)$, которые соответствуют

частотам ω_3 , ω_4 , близким к третьей собственной частоте стержня без гасителя $\omega_3^0=160,26$ рад/с (рис. 3).

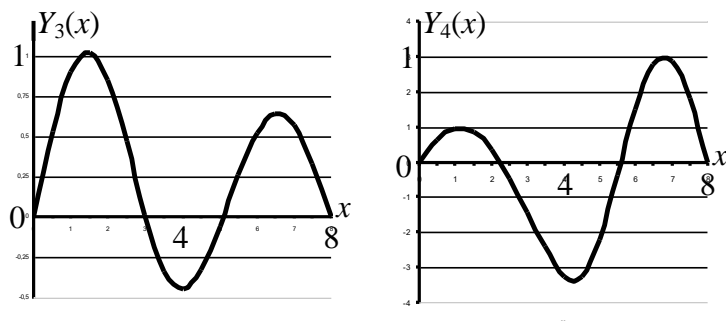


Рис. 3. Собственные формы колебаний стержня с гасителем при $\zeta=3/7$ и $D_c=800$

В случае, когда новая частота системы «стержень – гаситель» достаточно далека от собственной частоты стержня без гасителя, ей могут соответствовать переходные формы колебаний с разным числом узлов. На рис. 4 представлена третья собственная форма системы $Y_3(x)$ при $\zeta=3/7$ и различных значениях относительной жесткости $D_c=150, 300, 410$ и 800 , которым соответствуют частоты $\omega_3=80,27; 105,55; 119,09$ и $141,05$ рад/с. При таких параметрах системы третья собственная частота ω_3 принимает значения в диапазоне между второй и третьей собственными частотами стержня без гасителя ω_2^0, ω_3^0 . Как видно из графиков, число узлов переходной собственной формы системы может варьироваться от нуля до двух, причем конфигурация безузловой ($n'=0$) и одноузловой ($n'=1$) форм

существенно отличается от конфигураций соответствующих (без- и одноузловой) форм колебаний стержня без гасителя. При этом нарушается закономерность увеличения числа узлов с ростом номера формы, характерная для стержня без гасителя.

В частных случаях расположения точки крепления гасителя отмеченные закономерности принимают другой вид. На рис. 5 представлены графики первых четырех собственных форм колебаний стержня с гасителем, которые соответствуют параметрам системы $\zeta=1/2$, $D_c=150$ и частотам $\omega_1=16,18$ рад/с, $\omega_2 = \omega_2^0=71,23$ рад/с, $\omega_3=74,86$ рад/с, $\omega_4=164,07$ рад/с. При таком значении параметра ζ точка крепления гасителя находится в середине стержня и система «стержень – гаситель» является симметричной.

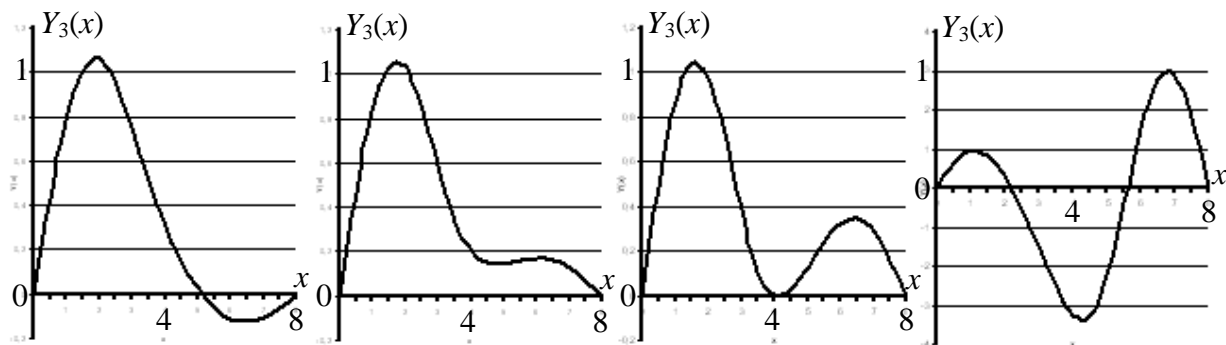


Рис. 4. Третья собственная форма колебаний стержня с гасителем при $\zeta=3/7$ и $D_c=150$ ($n'=1$), 300 ($n'=0$), 410 ($n'=1$), 800 ($n'=2$) соответственно

В этом случае переходная форма $Y_3(x)$ также является симметричной относительно середины стержня и, несмотря на близкие значения частот системы ω_2 и ω_3 , существенно отличается от конфигурации второй собственной формы $Y_2(x)$, являясь безузловой ($n'=0$). Следует отметить, что при

размещении гасителя в узловой точке формы колебаний стержня без гасителя соответствующие частота и форма, в данном случае ω_2 и $Y_2(x)$, остаются такими же и для стержня с гасителем при любых значениях параметра D_c .

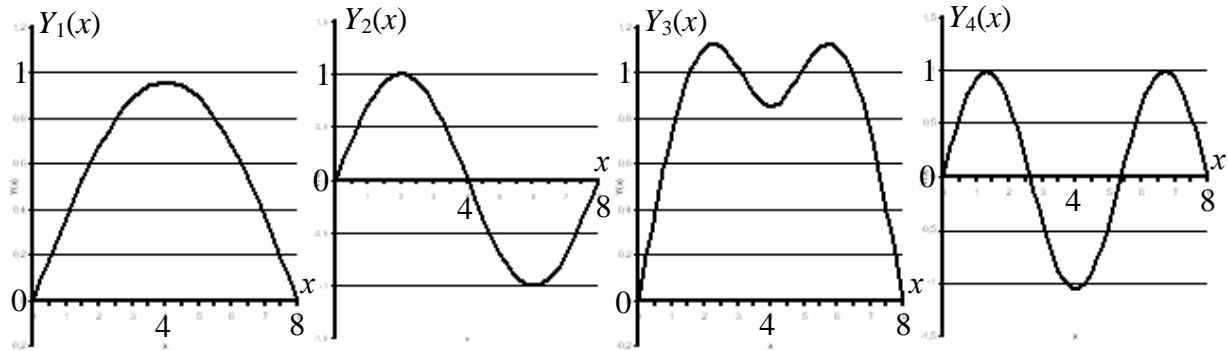


Рис. 5. Собственные формы колебаний стержня с гасителем при $\xi=1/2$ и $D_c=150$

На рис. 6 представлены конфигурации переходной формы системы при $\xi=1/2$ и значениях относительной жесткости $D_c=100, 200, 380, 400$, что соответствует частотам $\omega_2 = 61,91$ рад/с, $\omega_3 = 85,35$ рад/с, $\omega_3 = 111,23$ рад/с, $\omega_3 = 113,28$ рад/с. При этом частоте $\omega_2 < \omega_2^0$ ($\omega_2^0 = 71,23$ рад/с) соответствует вторая $Y_2(x)$, а

частотам $\omega_3 > \omega_2^0$ третья $Y_3(x)$ собственные формы колебаний системы. Как видно из графиков, число узлов переходной формы системы в рассматриваемой диапазоне частот варьируется от нуля до двух, причем конфигурации безузловой ($n'=0$), одноузловой ($n'=1$) и двухузловой ($n'=2$) форм остаются симметричными. При этом также нарушается закономерность увеличения числа узлов с ростом номера формы, характерная для стержня без гасителя.

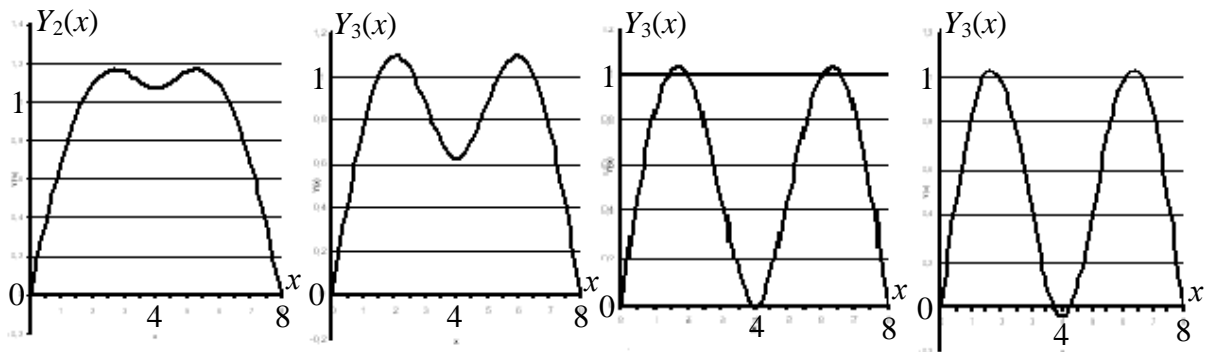


Рис. 6. Собственные формы колебаний стержня с гасителем при $\xi=1/2$ и $D_c=100$ ($n'=0$), 200 ($n'=0$), 380 ($n'=1$), 400 ($n'=2$) соответственно

Выводы

Анализ собственных форм колебаний стержня с гасителем показывает, что их конфигурация определяется положением соответствующей собственной частоты в спектре частот стержня без гасителя. Можно выделить три случая:

- если определенная собственная частота системы «стержень – гаситель» равна собственной частоте

стержня без гасителя, то соответствующая форма колебаний системы *совпадает* с формой колебаний стержня без гасителя;

- если собственная частота системы *близка* к собственной частоте стержня без гасителя, то соответствующая ей форма *подобна* форме колебаний стержня без гасителя (содержит то же число узлов), но имеет выраженную асимметрию амплитуд;

- если же собственная частота системы находится в интервале между собственными частотами стержня без гасителя, то соответствующая ей форма имеет конфигурацию, переходную между ближайшими формами колебаний стержня без гасителя. Другими словами, конфигурация этой формы аккумулирует свойства одной или двух ближайших форм колебаний стержня без гасителя. При этом может нарушаться последовательность увеличения числа узлов с ростом номера формы, характерная для стержня без гасителя. В частных случаях крепления гасителя «переходная» форма аккумулирует свойства ближайших форм колебаний стержня без гасителя, исключая ту форму, которая соответствует частоте системы, равной собственной частоте стержня без гасителя.

Решение поставленной задачи даёт возможность учесть особенности собственных форм колебаний стержня с гасителем, что существенно при применении численных методов определения собственных характеристик системы, в частности, в задачах с другими граничными условиями или для стержней переменного поперечного сечения, а также для прогнозирования поведения системы при заданном внешнем возмущении.

Литература

1. Середя, Н.В. Влияние динамических нагрузок на прочность и долговечность канатов подъемной установки [Текст] / Н.В. Середя, А.А. Чупрынин // Комунальне господарство міст. Серія: Технічні науки та архітектура: наук.-техн. зб. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2016. – Вип. 132. – С. 21–24.
2. Шпачук, В.П. Методи й установки для випробувань на багатокоординатний зовнішній вібраційний вплив [Текст] / В.П. Шпачук, В.В. Дудко, І.В. Костенко // Комунальне господарство міст: наук.-техн. зб. – К.: Техніка, 2015, Вип. 120. – С. 12–20.
3. Шпачук, В.П. Особливості динамічної взаємодії на четвертій фазі проходження вагоном стикової нерівності [Текст] / В.П. Шпачук, О.О. Чупринін, Т.О. Супрун // Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. – Харків: УкрДУЗТ, 2016. – Вип. 165. – С. 167–173.
4. Clough, R.W. Dynamics of Structures. Third Edition [Text] / R.W. Clough, J. Penzien // Computers and Structures. – 2003. – 730 p.
5. Shpachuk, V.P. Effect of mutually amplifying action two coordinate shock loading in problems of dynamics of knots of machines [Text] / V.P. Shpachuk // Scientific Bulletin of National Mining University. Scientific and technical journal. – 2016. – No.6 (156), pp. 89–94.
6. Карамышкин, В.В. Динамическое гашение колебаний [Текст] / В.В. Карамышкин. – Л.: Машиностроение, 1988. – 108 с.
7. Коренев, Б.Г. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения [Текст] / Б.Г. Коренев, Л.М. Резников. – М.: Наука, 1988. – 304 с.

8. Елисеев, В.В. О локализации динамического гашения колебаний в пространстве и по частоте [Текст] / В.В. Елисеев, Е.А. Оборин // Теория механизмов и машин. – 2014. – № 1 (23). – Т. 12. – С. 20–26.
9. Макаров, С.Б. Мультирезонансный динамический гаситель [Текст] / С.Б. Макаров, Н.В. Панкова, М.Д. Перминов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – №2. – С. 70–74.
10. Мартин, В.Є. Застосування різного типу маятникових динамічних гасників коливань [Текст] / В.Є. Мартин, Б.М. Дівеєв, І.Р. Дорош // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Прикладная механика. – 2014. – 5/7 (71). – С. 15–19.
11. Тулкина, А.Н. Определение частот и форм колебаний стержневой системы, содержащей нанообъект, на основе теории С.П. Тимошенко [Текст] / А.Н. Тулкина // Вестник СПбГУ (Серия 1). – СПбГУ, 2011. – Вып. №1. – С. 144–154.
12. Latas W. Distributed Dynamic Vibration Absorber in Beam [Text] / W. Latas // Journal of Vibrations in Physical Systems. – 2014. – Vol. 26. – P. 137–144.
13. Wong, W.O. Design of a dynamic vibration absorber for vibration isolation of beams under point or distributed loading [Text] / W.O. Wong, S.L. Tang, Y.L. Cheung, L. Cheng // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 301. – P. 898–908.
14. Zainulabidin, M.H. Transverse Vibration of a Beam Structure Attached With Dynamic Vibration Absorbers: Experimental Analysis / M.H. Zainulabidin, N. Jaini // International Journal of Engineering & Technology. – 2012. – Vol. 12, No. 6. – P. 82–86.
15. Шпачук, В.П. Влияние механических и конструктивных параметров стержня с гасителем на собственные частоты поперечных колебаний [Текст] / В.П. Шпачук, А.И. Рубаненко, Ю.И. Ващенко // Комунальне господарство міст. Серія: Технічні науки та архітектура: наук.-техн. зб. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. – Вип. 134. – С. 2–8.
16. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

References

1. Sereda, N.V. Vliianie dinamicheskikh nagruzok na prochnost i dolgovechnost kanatov podiomnoi ustanovki [Tekst] / N.V. Sereda, A.A. Chuprynin // Komunalne gospodarstvo mist. Seriya: Tekhnichni nauky ta arkhitektura: nauk.-tekh. zb. – Kharkiv: KhNUMG im. O.M. Beketova, 2016. – Vyp. 132. – S. 21–24.
2. Shpachuk, V.P. Metody i ustanovky dlia vyprobuvan na bagatokoordynatnyi zovnishnii vibratsiyni vplyv [Tekst] / V.P. Shpachuk, V.V. Dudko, I.V. Kostenko // Komunalne gospodarstvo mist: nauk.-tekh. zb. – K.: Tekhnika, 2015, Vyp. 120. – S. 12–20.
3. Shpachuk, V.P. Osoblyvosti dynamichnoi vzaiemidii na chetvrtii fazi prokhodzhennia vagonom stykovoї nerivnosti [Tekst] / V.P. Shpachuk, O.O. Chuprynin, T.O. Suprun // Zbirnyk naukovykh prats Ukrainського derzhavnogo universitetu zaliznychnogo transportu. – Kharkiv: UkrDUZT, 2016. – Vyp. 165. – S. 167–173.
4. Clough, R.W. Dynamics of Structures. Third Edition [Text] / R.W. Clough, J. Penzien // Computers and Structures. – 2003. – 730 p.

5. Shpachuk, V.P. Effect of mutually amplifying action two coordinate shock loading in problems of dynamics of knots of machines [Text] / V.P. Shpachuk // Scientific Bulletin of National Mining University. Scientific and technical journal. – 2016. – No.6 (156), pp. 89–94.
6. Karamyshkin, V.V. Dinamicheskoe gashenie kolebaniy [Tekst] / V.V. Karamyshkin. – L.: Mashinostroenie, 1988. – 108 s.
7. Korenev, B.G. Dinamicheskie gasiteli kolebaniy: Teorija i tekhnicheskie prilozheniya [Tekst] / B.G. Korenev, L.M. Reznikov. – M.: Nauka, 1988. – 304 s.
8. Eliseyev, V.V. O lokalizatsii dinamicheskogo gasheniya kolebaniy v prostranstve i po chastote [Tekst] / V.V. Eliseyev, E.A. Oborin // Teoriya mekhanizmov i mashin. – 2014. – № 1 (23). – T. 12. – S. 20–26.
9. Makarov, S.B. Multirezonsnyy dinamicheskiy gasitel [Tekst] / S.B. Makarov, N.V. Pankova, M.D. Perminov // Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii. – 2012. – №2. – S. 70–74.
10. Martyn, V.E. Zastosuvannya riznogo typu mayatnikovykh dynamichnykh gasnykiv kolyvan [Tekst] / V.E. Martyn, B.M. Diveyev, I.R. Dorosh // Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh technologii. Prikladnaya mekhanika. – 2014. – 5/7 (71). – S. 15–19.
11. Tulkina, A.N. Opredeleniye chastot i form kolebaniy sterzhnevoy sistemy, soderzhashchey nanoobyekt, na osnove teorii S.P. Timoshenko [Tekst] / A.N. Tulkina // Vestnik SPbGU (Seriya 1). – SPbGU, 2011. – Vyp. №1. – S. 144–154.
12. Latas W. Distributed Dynamic Vibration Absorber in Beam [Text] / W. Latas // Journal of Vibrations in Physical Systems. – 2014. – Vol. 26. – P. 137–144.
13. Wong, W.O. Design of a dynamic vibration absorber for vibration isolation of beams under point or distributed loading [Text] / W.O. Wong, S.L. Tang, Y.L. Cheung, L. Cheng // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 301. – P. 898–908.
14. Zainulabidin, M.H. Transverse Vibration of a Beam Structure Attached With Dynamic Vibration Absorbers: Experimental Analysis / M.H. Zainulabidin, N. Jaini // International Journal of Engineering & Technology. – 2012. – Vol. 12, No. 6. – P. 82–86.
15. Shpachuk, V.P. Vliianie mekhanicheskikh i konstruktivnykh parametrov sterzhnia s gasitelem na sobstvennye chastoty poperechnykh kolebaniy [Tekst] / V.P. Shpachuk, A.I. Rubanenko, Y.I. Vashchenko // Komunalne gospodarstvo mist. Seriya: Tekhnichni nauky ta arkhitektura: nauk.-tekhn. zb. – Kharkiv: KhNUMG im. O.M. Beketova, 2017. – Vyp. 134. – S. 2–8.
16. Babakov, I.M. Teoriya kolebaniy [Tekst] / I.M. Babakov. – M.: Drofa, 2004. – 591 s.

Рецензент: д-р техн. наук проф. В.П. Шпачук,
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.М. Бекетова, Украина

Автор: РУБАНЕНКО Александр Игоревич
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры
Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А.М. Бекетова, Украина
E-mail – Rubanenko.Oleksandr@ukr.net

ОСОБЛИВОСТІ ВЛАСНИХ ФОРМ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ З ГАСИТЕЛЕМ

О.І. Рубаненко

Харківський національний університет міського господарства ім. О.М.Бекетова, Україна

Розглянуто задачу про вільні поперечні коливання стержня з пружно приєднаної масою в якості гасителя. Визначено власні форми коливань системи при шарнірному закріпленні кінців стержня. Досліджено особливості форм коливань для різних параметрів жорсткостей стержня і гасителя, а також координат точки кріплення гасителя до несучого стержня.

Ключові слова: динамічний гаситель коливань, вільні поперечні коливання стержня, власна форма.

FEATURES OF THE NATURAL MODES OF FREE TRANSVERSE VIBRATIONS OF THE ROD WITH MASS DAMPER

A. Rubanenko

O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv, Ukraine.

The problem of free transverse vibrations of the rod with mass damper is considered. The equation of mode shapes is obtained using Fourier method. For the given parameters the natural frequencies and modes of transverse vibrations of the rod with mass damper are defined. The features of the natural modes for different parameters of stiffness of the rod and the damper, as well as coordinate points of attachment of the damper to the supporting rod, are investigated. It is established that the configuration of the natural modes is determined by the position of the corresponding natural frequencies in the frequency spectrum of the rod without the damper. Natural mode of the rod with mass damper can coincide with the mode shapes of the rod without the damper, to be like her or be transitional between the closest mode shapes of the rod without the damper. This may disrupt the sequence of number of nodes with increasing number of the natural mode, which is characteristic of the rod without the damper. The solution of the problem takes into account the peculiarities of features of the natural modes of the rod with mass damper, substantially in the application of numerical methods of determination of characteristics of the system, in particular, in problems with other boundary conditions or for rods of variable cross-section, as well as to predict future behaviour of a system under a given external perturbation.

Keywords: mass damper, free transverse rod vibrations, natural mode.